• 수학 영역 •

수학 정답

1	③	2	④	3	⑤	4	①	5	⑤
6	②	7	③	8	②	9	④	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	②	19	①	20	③
21	②	22	35	23	5	24	22	25	3
26	9	27	16	28	12	29	15	30	250

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$A+B=(x^3+2x^2)+(2x^3-x^2-1)$
$=(x^3+2x^3)+(2x^2-x^2)-1$
$=3x^3+x^2-1$

2. [출제의도] 조건의 진리집합을 이해한다.

실수 x에 대한 조건 'x는 음이 아닌 실수이다.'의 진리집합은 $\{x \mid x \geq 0\}$이다.

3. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

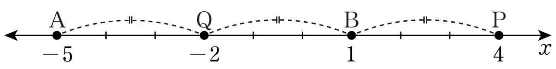
4. [출제의도] 수직선 위의 선분의 외분을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

두 점 $A(-5)$, $B(1)$에 대하여 선분 AB를 3:1로 외분하는 점의 좌표는

$\dfrac{3\times1-1\times(-5)}{3-1}=\dfrac{3+5}{2}=4$

[보충 설명]

선분 AB를 3:1로 외분하는 점을 P라 할 때, 세 점 $A(-5)$, $B(1)$, $P(4)$의 위치는 그림과 같고, 두 점 $B(1)$, $Q(-2)$는 선분 AP를 삼등분하는 점이다.



5. [출제의도] 복소수의 값을 계산한다.

$(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^2$
$=\{\sqrt{2}(1+i)\}^2$
$=(\sqrt{2})^2(1+i)^2$
$=2\times(1+2i+i^2)$
$=2\times(1+2i-1)$
$=2\times2i=4i$

6. [출제의도] 곱셈 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

에서 $a+b=2$, $a^3+b^3=10$이므로

$8=10+3ab\times2$

$6ab=-2$

$ab=-\dfrac{1}{3}$

7. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

직선 $3x+2y-1=0$, 즉 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$이다. 이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면, $-\dfrac{3}{2}\times m=-1$에서 $m=\dfrac{2}{3}$

점 $(6, a)$를 지나고 기울기가 $\dfrac{2}{3}$인 직선의 방정식은

$y=\dfrac{2}{3}(x-6)+a$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0=\dfrac{2}{3}\times(0-6)+a=-4+a$

$a=4$

8. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

이차함수 $y=x^2+ax+a^2$의 그래프가 직선 $y=-x$에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+a^2=-x$, 즉

$x^2+(a+1)x+a^2=0$

의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$D=(a+1)^2-4a^2$
$=-3a^2+2a+1$
$=-(3a+1)(a-1)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

9. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$ax+4\sqrt{3}y=r^2$, $ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$

이 접선이 직선

$x-\sqrt{3}y+b=0$

과 일치하므로

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\dfrac{-r^2}{b}$

에서

$a=-4$, $r^2=4b$ …… ㉠

한편, 점 $(a, 4\sqrt{3})$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$a^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$

$r^2=(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=64$

$r>0$이므로 $r=8$

㉠에서 $b=\dfrac{r^2}{4}=\dfrac{64}{4}=16$

따라서

$a+b+r=(-4)+16+8=20$

[다른 풀이]

점 $(a, 4\sqrt{3})$을 A라 하자.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식이 $x-\sqrt{3}y+b=0$이므로 이 접선의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

원점 O에 대하여 직선 OA는 이 접선과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 $-\sqrt{3}$이다.

두 점 $O(0, 0)$, $A(a, 4\sqrt{3})$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4\sqrt{3}}{a}$이므로

$\dfrac{4\sqrt{3}}{a}=-\sqrt{3}$

$a=-4$

점 $(-4, 4\sqrt{3})$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=16+48=64=r^2$

$r>0$이므로 $r=8$

따라서 원 $x^2+y^2=64$ 위의 점 $(-4, 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$-4x+4\sqrt{3}y=64$, $x-\sqrt{3}y+16=0$

이고 이 접선이 직선 $x-\sqrt{3}y+b=0$과 일치하므로

$b=16$

따라서

$a+b+r=(-4)+16+8=20$

10. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+2x-3$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)=0$

에서

$x=1$ 또는 $x^2+x+3=0$

$x^2+x+3=0$에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

따라서

$a^2b^2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{11}{4}=\dfrac{11}{16}$

11. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해하여 조건을 만족시키는 집합의 원소의 개수를 구한다.

드모르간의 법칙에 의하여

$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C$
$=(A-B)^C$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

이때

$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

이고 집합 $A\cap B$는 30의 약수 중 3의 배수를 원소로 갖는 집합이므로

$A\cap B=\{3, 6, 15, 30\}$

$n(U)=50$이므로

$n(A^C\cup B)=n((A-B)^C)$
$=n(U)-n(A-B)$
$=n(U)-\{n(A)-n(A\cap B)\}$
$=50-(8-4)=46$

12. [출제의도] 순열을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

위의 각각의 경우에 대하여 1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ②라 할 때, 조건 (가)를 만족시키도록 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우는 다음 3가지 중 하나이다.

②①②①②, ②①②②①②, ②②①②①②

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 위의 3가지 경우 모두

$2!\times2!=4$

로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times3\times4=144$

[다른 풀이]

먼저 2학년 학생 4명이 일렬로 앉은 후 1학년 학생 2명이 조건을 만족시키도록 앉는 경우를 생각하자.

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

이때 2학년 학생을 ②라 하자.

②∨②∨②∨②

위의 각각의 경우에 대하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키려면 1학년 학생 2명은 ∨ 표시된 3곳 중에서 2곳을 택하여 앉아야 하므로 1학년 학생이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

13. [출제의도] 함수의 정의를 이해하여 식의 값을 구한다.

조건 (가)에서 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$이다.

조건 (가)에서 g는 상수함수이므로 집합 X의 원소 중 하나를 k라 할 때, $g(x)=k$이다.

조건 (나)에서

$f(x)+g(x)+h(x)=x+k+h(x)=7$

이므로 $h(x)=-x+7-k$이다.

$x\in X$에서 $1\le x\le 5$이므로

$2-k\le -x+7-k\le 6-k$

이때 $1\le h(x)\le 5$이어야 하므로

$2-k\ge 1$이고 $6-k\le 5$

에서 $k=1$이다.

즉, $g(x)=1$, $h(x)=-x+6$에서

$g(3)+h(1)=1+5=6$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 g는 상수함수이므로

$g(3)=g(1)$이다.

조건 (나)에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$이고

조건 (가)에서 f는 항등함수이므로

$f(1)=1$이다.

따라서

$$\begin{aligned}g(3)+h(1)&=g(1)+h(1)\\&=7-f(1)\\&=7-1=6\end{aligned}$$

14. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

이차부등식 $x^2+3x-10<0$에서

$(x+5)(x-2)<0$, $-5<x<2$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1이고 개수는 6이다.

(i) $a=0$인 경우

$ax\ge a^2$에서 $0\times x\ge 0$이고 이 부등식의 해는 모든 실수이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 6이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>0$인 경우

$ax\ge a^2$에서 $x\ge a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 0 또는 1이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$인 경우

$ax\ge a^2$에서 $x\le a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이기 위해서는 그 값이 -4, -3, -2, -1이어야 한다. 따라서 정수 a의 값은 -1이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-1$

15. [출제의도] 항등식의 성질과 인수정리를 이해하여 식의 값을 구한다.

주어진 항등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8-4-6-2=0-2a$

$a=10$

$x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+10x$에서

$(x+2)P(x)=x^3-x^2-7x-2$

$Q(x)=x^3-x^2-7x-2$라 하면 $Q(-2)=0$이므로 $Q(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

이때 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & -1 & -7 & -2\\ & & -2 & 6 & 2\\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}Q(x)&=x^3-x^2-7x-2\\&=(x+2)(x^2-3x-1)\end{aligned}$$

$(x+2)P(x)=(x+2)(x^2-3x-1)$

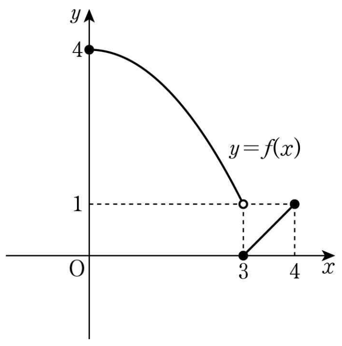
이 등식이 x에 대한 항등식이고 $P(x)$가 다항식이므로

$P(x)=x^2-3x-1$

따라서 $P(-2)=4+6-1=9$

16. [출제의도] 일대일대응을 이해하여 식의 값을 구한다.

집합 $\{x\,|\,3\le x\le 4\}$에서 정의된 함수 $y=x-3$의 치역은 $\{y\,|\,0\le y\le 1\}$이므로 함수 f가 일대일대응이 되기 위해서는 집합 $\{x\,|\,0\le x<3\}$에서 정의된 함수 $y=ax^2+b$의 치역이 $\{y\,|\,1<y\le 4\}$이어야 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서 이차함수 $g(x)$를 $g(x)=ax^2+b$라 할 때,

$g(0)=4$, $g(3)=1$이다.

$g(0)=4$에서 $b=4$

$g(3)=1$에서 $9a+b=1$

즉, $a=-\dfrac{1}{3}$

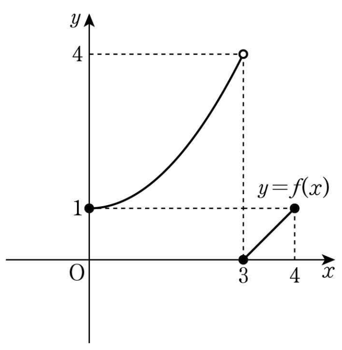
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^2+4 & (0\le x<3)\\ x-3 & (3\le x\le 4)\end{cases}$$

이므로

$f(1)=-\dfrac{1}{3}\times 1^2+4=\dfrac{11}{3}$

[보충 설명]

위의 풀이에서 이차함수 $g(x)=ax^2+b$에 대하여 $g(0)=1$, $g(3)=4$인 경우에는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



이 경우에는 $f(0)=f(4)=1$이므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다. 또한, 공역의 원소 4가 치역에 속하지 않으므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

17. [출제의도] 이차방정식이 허근을 가질 조건을 이용하여 식의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 허수 z는 x에 대한 이차방정식

$x^2+mx+n=0$ …… ㉠

의 한 근이다. 이때 m, n이 정수이고 z가 허수이므로 방정식 ㉠은 $x=\overline{z}$도 근으로 갖는다.

조건 (나)에서 $z+\overline{z}=8$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\overline{z}=-m=8$

$m=-8$

x에 대한 이차방정식 $x^2-8x+n=0$이 허근을 갖기 위해서는 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}D&=(-8)^2-4n\\&=64-4n<0\end{aligned}$$

$n>16$이므로 정수 n의 최솟값은 17이다.

따라서 $m+n$의 최솟값은

$-8+17=9$

[다른 풀이]

z는 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}z+\overline{z}&=(a+bi)+(a-bi)\\&=2a=8\end{aligned}$$

이므로 $a=4$이다.

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}(4+bi)^2+m(4+bi)+n&=(16+8bi+b^2i^2)+(4m+mbi)+n\\&=(16+8bi-b^2)+(4m+mbi)+n\\&=(16-b^2+4m+n)+b(8+m)i\\&=0\end{aligned}$$

이므로

$16-b^2+4m+n=0$ …… ㉠

$b(8+m)=0$ …… ㉡

㉡에서 $b\neq 0$이므로 $m=-8$

㉠에서 $n=16+b^2$이고 $b\neq 0$이므로 $n>16$

그러므로 정수 n의 최솟값은 17이다.

따라서 $m+n$의 최솟값은

$-8+17=9$

18. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 p에서

$|x-k|\le 2$, $k-2\le x\le k+2$

이므로

$P=\{x\,|\,k-2\le x\le k+2\}$

조건 q에서

$x^2-4x-5\le 0$, $(x+1)(x-5)\le 0$

$-1\le x\le 5$

이므로

$Q=\{x\,|\,-1\le x\le 5\}$

이고 이때

$Q^C=\{x\,|\,x<-1$ 또는 $x>5\}$

이다.

명제 $p\to q$와 명제 $p\to\sim q$가 모두 거짓이므로

$P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$

즉, $P\cap Q^C\neq\varnothing$이고 $P\cap Q\neq\varnothing$ …… ㉠

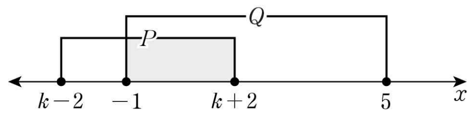
이어야 한다.

$k-2\ge -1$이고 $k+2\le 5$, 즉 $1\le k\le 3$이면 $P\subset Q$가 되어 조건을 만족시키지 않으므로 다음과 같이 k의 범위를 나누어 생각하자.

(i) $k<1$인 경우

㉠에서 $P\cap Q\neq\varnothing$이므로 [그림 1]과 같이

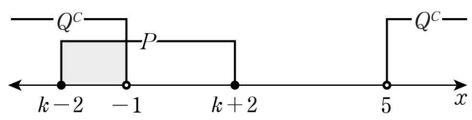
$-1\le k+2$, 즉 $k\ge -3$ …… ㉡



[그림 1]

$P\cap Q^C\neq\varnothing$이므로 [그림 2]와 같이

$k-2<-1$, 즉 $k<1$ …… ㉢



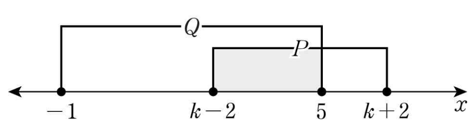
[그림 2]

㉡, ㉢에서 $-3\le k<1$이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 -3, -2, -1, 0이다.

(ii) $k>3$인 경우

㉠에서 $P\cap Q\neq\varnothing$이므로 [그림 3]과 같이

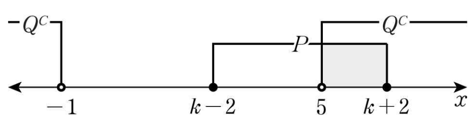
$k-2\le 5$, 즉 $k\le 7$ …… ㉣



[그림 3]

$P\cap Q^C\neq\varnothing$이므로 [그림 4]와 같이

$5<k+2$, 즉 $k>3$ …… ㉤



[그림 4]

㉣, ㉤에서 $3<k\le 7$이고 이 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 4, 5, 6, 7이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의

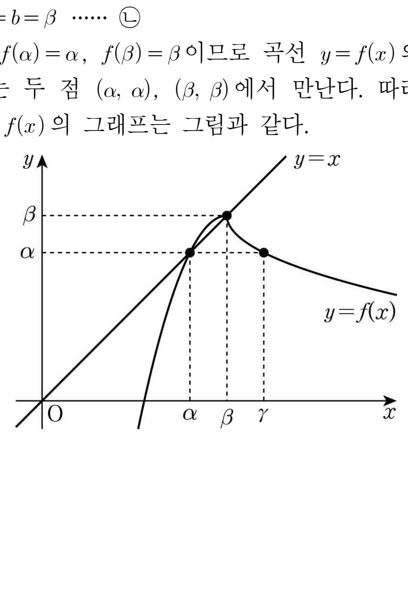
값은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이고 그 합은
$-3-2-1+0+4+5+6+7=16$

19. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

조건 (가)에서 $0\in A$
조건 (나)에서 명제 '$a^2-2\notin A$이면 $a\notin A$'가 참이므로 이 명제의 대우 '$a\in A$이면 $a^2-2\in A$'도 참이다.
$0\in A$이므로
$0^2-2=-2\in A$
$-2\in A$이므로
$(-2)^2-2=4-2=2\in A$
$2\in A$이므로
$2^2-2=2\in A$
그러므로 $\{-2,\ 0,\ 2\}\subset A$
조건 (다)에서 $n(A)=4$이므로
$A=\{-2,\ 0,\ 2,\ k\}$ (단, $k\neq -2,\ k\neq 0,\ k\neq 2$)
라 하자.
$k\in A$이면 $k^2-2\in A$이므로 k^2-2의 값은 $-2,\ 0,\ 2,\ k$ 중 하나이다.
(i) $k^2-2=-2$인 경우
$k^2=0$에서 $k=0$이 되어 $k\neq 0$에 모순이다.
(ii) $k^2-2=0$인 경우
$k^2=2$에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$
(iii) $k^2-2=2$인 경우
$k^2=4$에서 $k=-2$ 또는 $k=2$가 되어 $k\neq -2$, $k\neq 2$에 모순이다.
(iv) $k^2-2=k$인 경우
$k^2-k-2=0,\ (k-2)(k+1)=0$
이고 $k\neq 2$이므로
$k=-1$
(i)~(iv)에서 $k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$
따라서 집합 A가 될 수 있는 것은
$\{-2,\ 0,\ 2,\ -\sqrt{2}\},\ \{-2,\ 0,\ 2,\ \sqrt{2}\},\ \{-2,\ 0,\ 2,\ -1\}$
이고 개수는 3이다.

20. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$에서
$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ …… ㉠
조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$이고 조건 (가)에서 방정식 ㉠의 실근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$뿐이므로 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 $\alpha,\ \gamma$이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이거나, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 $\beta,\ \gamma$이다.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 $\alpha,\ \gamma$이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐인 경우를 생각하자.
방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 $\alpha,\ \gamma$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$는 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha,\ \gamma$이다. 또한, 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 β뿐이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$는 오직 한 점에서 만나고 이 점의 x좌표는 β이다. 이때 곡선 $y=f(x)$와 x축에 평행한 직선이 오직 한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이어야 한다. 그러므로 점 $(a,\ b)$는 점 $(\beta,\ \beta)$와 일치한다.
즉, $a=b=\beta$ …… ㉡
한편, $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha),\ (\beta,\ \beta)$에서 만난다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x$에서
$-(x-a)^2+b=x$
㉡에서
$-(x-\beta)^2+\beta=x,$
$(x-\beta)^2+(x-\beta)=0,$
$(x-\beta)(x-\beta+1)=0,$
$x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$
$f(\alpha)=\alpha$이고 $\alpha\neq\beta$이므로
$\alpha=\beta-1$
$f(\gamma)=\alpha$이고 $\gamma>\beta=a$이므로
$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha,$
$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1,$
$\sqrt{\gamma-\beta}=1,$
$\gamma=\beta+1$
이때 $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로
$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$
$3\beta=15,\ \beta=5$
$\alpha=\beta-1=4,\ \gamma=\beta+1=6$
따라서 ㉡에서 $a=b=5$이고

$$f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+5 & (x\le 5)\\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5)\end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(\alpha+\beta)&=f(9)\\&=-\sqrt{9-5}+5\\&=3\end{aligned}$$

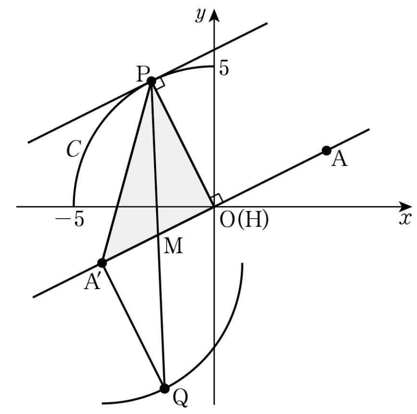
한편, 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근이 α뿐이고 방정식 $f(x)=\beta$의 실근이 $\beta,\ \gamma$인 경우에도 같은 방법으로 $f(\alpha+\beta)=3$이다.

21. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 삼각형과 관련된 명제의 참, 거짓을 추론한다.

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 삼각형 APQ의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{x+a+4}{3},\ \dfrac{y+b+2}{3}\right)$
이고 이 점이 원점 O와 일치하므로
$\dfrac{x+a+4}{3}=0,\ \dfrac{y+b+2}{3}=0$
$x=-a-4,\ y=-b-2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(-a-4,\ -b-2)$이다.
ㄱ. 두 점 P, Q의 좌표가 각각
$(a,\ b),\ (-a-4,\ -b-2)$
이므로 선분 PQ의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{a+(-a-4)}{2},\ \dfrac{b+(-b-2)}{2}\right)$
즉, $(-2,\ -1)$이다. (참)
ㄴ. 점 A′은 점 A(4, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 A′의 좌표는
$(-4,\ -2)$
이고
$\overline{\mathrm{A'Q}}=\sqrt{\{-4-(-a-4)\}^2+\{-2-(-b-2)\}^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}$
이때 점 P는 사분원의 호 C 위의 점이므로
$a^2+b^2=25$
따라서
$\overline{\mathrm{A'Q}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$
이므로 선분 A′Q의 길이는 5로 일정하다. (참)
ㄷ. 선분 OA′의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $(-2,\ -1)$이고 이는 선분 PQ의 중점의 좌표와 일치하므로 사각형 OPA′Q는 평행사변형이다. 즉, 삼각형 A′QP의 넓이는 삼각형 OPA′의 넓이와 같다. 점 P에서 직선 OA′에 내린 수선의 발을 H라 하면

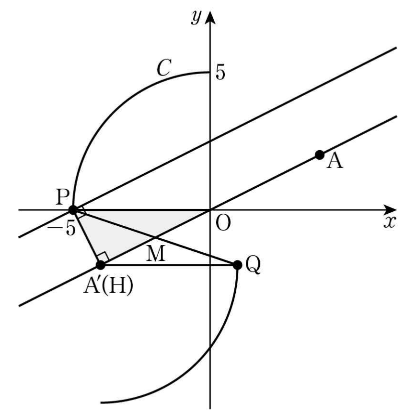
$$\begin{aligned}(\text{삼각형 OPA}'\text{의 넓이})&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{PH}}\\&=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PH}}\ \cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

이므로 선분 PH의 길이가 최대이면 삼각형 OPA′의 넓이도 최대이고, 선분 PH의 길이가 최소이면 삼각형 OPA′의 넓이도 최소이다.
선분 PH의 길이가 최대일 때는 사분원의 호 C 위의 점 P에서의 접선이 직선 OA′과 평행할 때이다.



[그림 1]

직선 OA′의 기울기는 $\dfrac{0-(-2)}{0-(-4)}=\dfrac{1}{2}$이므로
[그림 1]과 같이 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이 되는 점 P가 반드시 존재하고 이때 $\overline{\mathrm{OP}}=5$이다.
따라서 선분 PH의 길이의 최댓값은 5이므로 ㉠에서 삼각형 OPA′의 넓이의 최댓값은
$M=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 5=5\sqrt{5}$
한편, 선분 PH의 길이가 최소일 때는 [그림 2]와 같이 점 P의 좌표가 $(-5,\ 0)$일 때이다.



[그림 2]

직선 OA′의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$이므로 점 $(-5,\ 0)$과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-5-0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$
따라서 선분 PH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이므로 ㉠에서 삼각형 OPA′의 넓이의 최솟값은
$m=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$
따라서
$M\times m=5\sqrt{5}\times 5=25\sqrt{5}$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 곱을 계산한다.

$A\cap B=\{-7,\ -5\}$
이므로 모든 원소의 곱은
$(-7)\times(-5)=35$

23. [출제의도] 합성함수와 역함수의 값을 계산한다.

$f(1)=4,\ f(4)=3$이므로
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=3$
$f(2)=1$이므로 $f^{-1}(1)=2$
따라서
$(f\circ f)(1)+f^{-1}(1)=3+2=5$

24. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 식의 값을 구한

다.

다항식 $P(x)$를 x^2+3으로 나눈 몫이 $3x+1$, 나머지가 $x+5$이므로

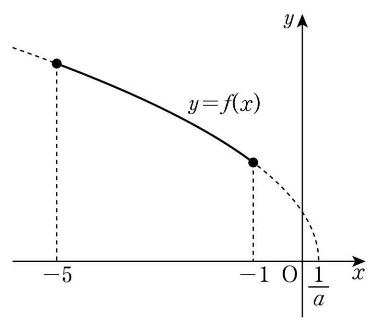
$P(x)=(x^2+3)(3x+1)+x+5$

나머지정리에 의하여 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$P(1)=4\times4+6=22$

25. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

a가 양수이므로 $-5\le x\le-1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$은 $x=-5$일 때 최대이고 최댓값이 4이므로

$f(-5)=4$

$\sqrt{5a+1}=4$

$5a+1=16$

따라서

$a=3$

26. [출제의도] 직선의 평행 조건을 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

직선 CD의 기울기는 음수이므로

$\dfrac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}<0$에서

$q-p<0$

$\overline{AB}=\overline{CD}$에서

$3=\sqrt{(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2}$

$3^2=(2\sqrt{2})^2+(q-p)^2$

$1=(q-p)^2$

$q-p<0$에서 $q-p=-1$

즉, $q=p-1$

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$에서 직선 AD의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같으므로

$\dfrac{q-1}{3\sqrt{2}-0}=\dfrac{p-4}{\sqrt{2}-0}$

$q-1=3p-12$ …… ㉠

$q=p-1$을 ㉠에 대입하면

$p-2=3p-12$

$2p=10,\ p=5$

$q=5-1=4$

따라서

$p+q=9$

27. [출제의도] 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(ⅰ) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

위의 각각의 경우에 대하여 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 이 경우의 수는

$4\times3=12$

(ⅱ) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_4C_1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$12+4=16$

28. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 미지수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 $y=n$이 곡선 $y=x^2-4x+4$와 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+4=n$의 실근과 같다.

$x^2-4x+4=n$

$(x-2)^2=n$

$x-2=\pm\sqrt{n}$

$x=2-\sqrt{n}$ 또는 $x=2+\sqrt{n}$

x_1, x_2 중 작은 것을 α, 큰 것을 β라 하면

$\alpha=2-\sqrt{n}$, $\beta=2+\sqrt{n}$이다.

(ⅰ) $1\le n\le4$인 경우

$\alpha\ge0$, $\beta>0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{|x_1|+|x_2|}{2}&=\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\frac{(2-\sqrt{n})+(2+\sqrt{n})}{2}\\&=2\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 n의 값은 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4이다.

(ⅱ) $n>4$인 경우

$\alpha<0<\beta$이므로

$$\begin{aligned}\frac{|x_1|+|x_2|}{2}&=\frac{-\alpha+\beta}{2}\\&=\frac{(\sqrt{n}-2)+(2+\sqrt{n})}{2}\\&=\sqrt{n}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 100 이하의 자연수 n의 값은 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100이므로 개수는 8이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수는

$4+8=12$

29. [출제의도] 도형의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

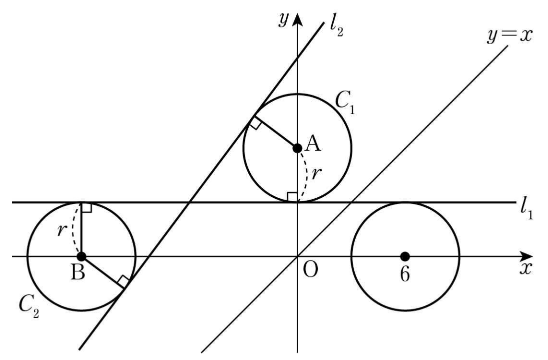
원 $(x-6)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0,\ 6)$, $(6+k,\ 0)$이고, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 모두 r이다.

점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 Q′이라 하면 점 P′은 원 C_1 위의 점이고, 점 Q′은 원 C_2 위의 점이다. 이때 두 점 P′$(x_1,\ y_1)$, Q′$(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 값은 직선 P′Q′의 기울기와 같다.

직선 P′Q′의 기울기의 최솟값이 0이므로 그림과 같이 원 C_2의 중심의 x좌표가 $-2r$보다 작고, 두 원 C_1, C_2는 모두 x축에 평행한 직선 l_1에 접한다.

따라서 $6+k<-2r$이고 $r=6-r$, 즉 $r=3$

또한, 직선 P′Q′의 기울기의 최댓값이 $\dfrac{4}{3}$이므로 그림과 같이 두 원 C_1, C_2는 모두 기울기가 $\dfrac{4}{3}$인 직선 l_2에 접하고, 이때 원 C_2의 중심의 x좌표는 직선 l_2의 x절편보다 작다.



직선 l_2의 방정식을 $y=\dfrac{4}{3}x+n$이라 하면 직선 l_2의 y절편은 점 A의 y좌표보다 크므로 $n>6$이다.

점 A$(0,\ 6)$과 직선 $y=\dfrac{4}{3}x+n$, 즉 $4x-3y+3n=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|0-18+3n|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

$|3n-18|=15$

$n>6$이므로 $3n-18=15$, $n=11$

즉, 직선 l_2의 방정식은 $4x-3y+33=0$이다.

점 B$(6+k,\ 0)$과 직선 $4x-3y+33=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|4(6+k)-0+33|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

$|4k+57|=15$

$k=-18$ 또는 $k=-\dfrac{21}{2}$

이때

$6+k=-12$ 또는 $6+k=-\dfrac{9}{2}$

직선 l_2의 x절편이 $-\dfrac{33}{4}$이므로 $6+k=-12$이어야 하고, 이는 $6+k<-2r=-6$을 만족시킨다.

즉, $k=-18$이다.

따라서 $|r+k|=|3+(-18)|=|-15|=15$

30. [출제의도] 이차함수와 유리함수의 그래프를 추론하여 미지수의 값을 구한다.

$a<1$, 즉 $1-a>0$이므로

$x\le a$에서 함수 $f(x)=\dfrac{1-a}{x-1}+2$는 x의 값이 커지면 y의 값은 작아진다. …… ㉠

이때 $x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$를 점근선으로 가지므로

$x\le a$이면 $f(a)\le f(x)<2$ …… ㉡

이다.

조건 (가)에 의하여 $x\le0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최소이므로 a의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) $-2<a<1$인 경우

㉠에서 $f(-2)>f(a)$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=-2$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-1}+2 & (x\le-2)\\ bx(x+2)+1 & (x>-2)\end{cases}$$

이다.

㉠에서 $x\le-2$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\ge f(-2)$이다.

$f(-2)=f(0)=1$이고

$-2<x\le0$에서 $f(x)=bx(x+2)+1$이므로

조건 (가), (나)를 만족시키려면 $b<0$이어야 한다.

한편, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합이 2이어야 한다.

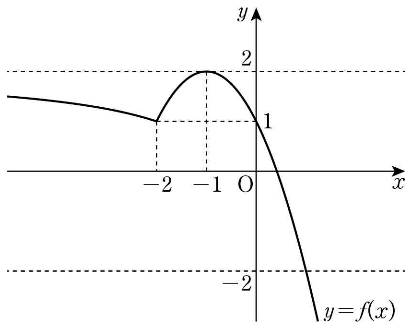
㉡에서

$f(-2)=1\le f(x)<2$

이므로 $x \le -2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$ 또는 $y=-2$와 만나지 않는다.

$x>-2$에서 함수 $f(x)=bx(x+2)+1\,(b<0)$의 그래프는 직선 $y=-2$와 한 점에서 만난다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 1]과 같이 함수 $f(x)=bx(x+2)+1$의 그래프는 직선 $y=2$에 접해야 한다.



[그림 1]

함수 $f(x)=bx(x+2)+1$은 $x=-1$에서 최대이므로 $f(-1)=2$이다.

$f(-1)=b\times(-1)\times1+1=2$에서 $b=-1$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $(-2,\ -1)$이다.

(iii) $a<-2$인 경우

$f(a)=f(0)=1$ 이고 ㉠, ㉡에서

$x \le a$일 때 $1 \le f(x) < 2$ 이다.

$a<x\le0$ 에서 $f(x)=bx(x-a)+1$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 에서 최소이어야 한다. 즉, $b>0$ 이고 $\frac{a}{2}=-2$이어야 한다.

$a=-4$이고, 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-1}+2 & (x\le-4) \\ bx(x+4)+1 & (x>-4) \end{cases}$$

이다.

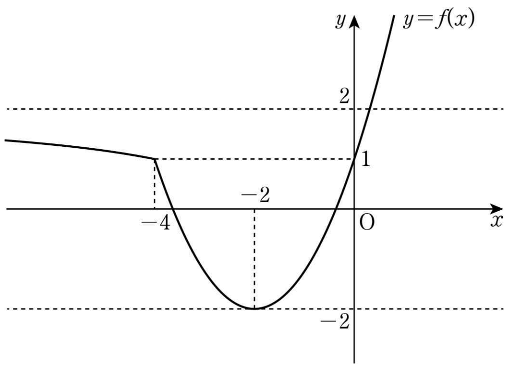
한편, ㉡에서

$f(-4)=1\le f(x)<2$

이므로 $x\le-4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$ 또는 $y=-2$와 만나지 않는다.

$x>-4$에서 함수 $f(x)=bx(x+4)+1$의 그래프는 직선 $y=2$와 한 점에서 만난다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키려면 [그림 2]와 같이 $x>-4$ 에서 함수 $f(x)=bx(x+4)+1$의 그래프는 직선 $y=-2$에 접해야 한다.



[그림 2]

함수 $f(x)=bx(x+4)+1$은 $x=-2$에서 최소이므로 $f(-2)=-2$이다.

$f(-2)=b\times(-2)\times2+1=-2$에서 $b=\frac{3}{4}$

따라서 이때의 a, b의 순서쌍은 $\left(-4,\ \frac{3}{4}\right)$이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$는

$(-2,\ -1)$, $\left(-4,\ \frac{3}{4}\right)$이다.

따라서

$$-40\times(a_1+b_1+a_2+b_2)=-40\times\left\{-2+(-1)+(-4)+\frac{3}{4}\right\}$$
$$=250$$