● 수학 영역 ●

수학 정답

1	①	2	④	3	①	4	②	5	⑤
6	①	7	③	8	⑤	9	②	10	②
11	③	12	④	13	④	14	⑤	15	③
16	4	17	11	18	427	19	18	20	66
21	12	22	729						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$\sqrt[3]{8}\times\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}=2\times2^{-1}=1$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=6x^2-2x$ 이므로 $f'(1)=6-2=4$

3. [출제의도] 등비수열을 이용하여 항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_7=4a_6-16$에서 $a_5r^2=4a_5r-16$이므로

$4r^2=4\times4r-16,\ r^2-4r+4=0,\ (r-2)^2=0$

따라서 $r=2$

$a_8=a_5r^3=4\times2^3=32$

4. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$\int_1^x f(t)dt=x^3-ax+1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $1-a+1=0,\ a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하고 $a=2$를 대입하면

$f(x)=3x^2-2$이므로

$f(2)=12-2=10$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$에서 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta>0$에서 $\sin\theta<0$

θ는 제3사분면의 각이고

$\sin\theta=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{-\dfrac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

6. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to2-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to2+}\{f(x)\}^2=\{f(2)\}^2$이어야 하므로

$\lim_{x\to2-}\{f(x)\}^2=(5-2a)^2,\ \lim_{x\to2+}\{f(x)\}^2=1,\ \{f(2)\}^2=1$

에서 $(5-2a)^2=1$

따라서 $a=2$ 또는 $a=3$

모든 상수 a의 값의 합은 $2+3=5$이다.

7. [출제의도] 정적분을 활용하여 곡선과 x축 사이의 넓이를 구한다.

구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2(|x^2-2x|+1)dx=\int_0^2(-x^2+2x+1)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2=\dfrac{10}{3}$

8. [출제의도] 선분의 내분점과 로그함수를 이해하여 상수의 값을 구한다.

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2(m+3)+m}{2+1},\ \dfrac{2(m-3)+(m+3)}{2+1}\right)$ 즉, $(m+2,\ m-1)$

점 $(m+2,\ m-1)$이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있으므로

$m-1=\log_4(m+10)+m-3$에서 $\log_4(m+10)=2$

$m+10=16$이므로 $m=6$

9. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$g(x)=x^3-3x^2+p$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x가 2개가 되려면

$g(0)=p>0,\ g(2)=p-4<0$ 즉, $0<p<4$

$f(0)=|p|=p,\ f(2)=|p-4|=4-p$

$f(0)=f(2)$이므로 $p=4-p$ 즉, $p=2$

10. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k=\dfrac{9(2a+8d)}{2}=27$

$a+4d=3$ 즉, $a_5=3$ …… ㉠

$a_5>0$이고 $d>0$이므로 $a_6>0$

(i) $a_4\ge0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=(a+3d)+(a+5d)=2a+8d=8$

$a+4d=4$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $a_4<0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=-(a+3d)+a+5d=2d=8,\ d=4$

(i), (ii)에서 $d=4$이므로

$a_{10}=a_5+5d=3+5\times4=23$

11. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 PBC에서

$\angle\mathrm{BPC}=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin135^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin30^\circ}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sin30^\circ}{\sin135^\circ}=\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times2\sqrt{2}\times b\times\cos60^\circ$

$b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ 이므로 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$A=60^\circ$에서 $C<120^\circ$이므로 $C=45^\circ$

$\angle\mathrm{PCA}=45^\circ-15^\circ=30^\circ$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin30^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

12. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 함수의 극한에 관한 문제를 해결한다.

직선 l의 기울기가 1이고 y절편은 $g(t)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2=x+g(t)$ 즉, $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-g(t)$ …… ㉠

한편 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+g(t)),\ \mathrm{B}(\beta,\ \beta+g(t))$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha-\beta)^2$

이고 ㉠에서 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4g(t)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2+8g(t)$에서 $4t^2=2+8g(t)$

$g(t)=\dfrac{2t^2-1}{4}$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2t^2-1}{4t^2}=\dfrac{1}{2}$

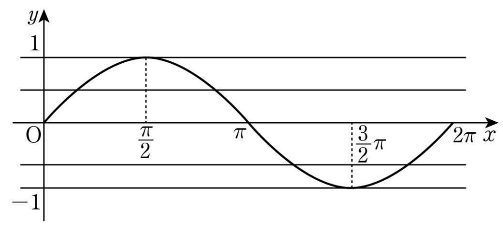
13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 추론한다.

(가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.

$\sin(a\pi)=-1$에서 $a=\dfrac{3}{2}$, $\sin(a\pi)=1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로

$-1\le t\le1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\le x\le2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은

$t=-1$일 때 $\dfrac{3}{2}\pi$, $-1<t\le0$일 때 3π,

$0<t<1$일 때 π, $t=1$일 때 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$0\le x\le2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이 $\dfrac{5}{2}\pi$이므로 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 $-1,\ \alpha$를 가지고 $0<\alpha<1$이다.

(i) $a=\dfrac{3}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b-\dfrac{1}{2}=0$ 즉, $b=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b+\dfrac{1}{2}=0$ 즉, $b=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$이고 $f(2)=\dfrac{9}{2}$이다.

14. [출제의도] 함수의 미분가능성과 그래프를 활용하여 도형의 넓이를 추론한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$f(k)=\lim_{x\to k-}f(x)=ak$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$f'(k)=\lim_{x\to k-}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\dfrac{ax-ak}{x-k}=a$

ㄱ. $f'(k)=a$이고 $a=1$이므로 $f'(k)=1$이다. (참)

ㄴ. $g(x)=-x^2+4bx-3b^2$이라 하자.

직선 $y=ax$는 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고,

접점의 좌표는 $(k,\ g(k))$이다.
$g'(x)=-2x+4b$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선의 방정식은
$y-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(x-k)$
이 직선이 원점을 지나므로
$0-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(0-k)$
$k^2-3b^2=0$
$k>0$, $b>0$이므로 $k=\sqrt{3}b$
$k=3$이므로 $b=\sqrt{3}$이고
$a=g'(k)=-2k+4b=(4-2\sqrt{3})b$
$=-6+4\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서

$$f(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})bx & (x<\sqrt{3}b)\\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\geq\sqrt{3}b)\end{cases}$$

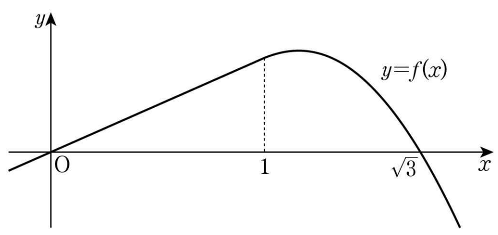
이고

$$f'(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})b & (x<\sqrt{3}b)\\ -2x+4b & (x\geq\sqrt{3}b)\end{cases}$$

$f(k)=f'(k)$에서 $f(\sqrt{3}b)=f'(\sqrt{3}b)$이므로
$-3b^2+4\sqrt{3}b^2-3b^2=-2\sqrt{3}b+4b$
따라서 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1)\\ -x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x\geq1)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 $x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 만나므로 구하는 넓이는

$\int_0^{\sqrt{3}}f(x)\,dx$
$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4\sqrt{3}-6}{3}+\int_1^{\sqrt{3}}\left(-x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$
$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$
$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\frac{4-2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

a_5+a_4가 홀수이면 a_6이 홀수이므로 $a_6=34$에 모순이다. 따라서 a_5+a_4는 짝수이고 a_4, a_5는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.
a_4, a_5가 모두 짝수이면 a_3도 짝수이고 마찬가지로 a_2, a_1도 모두 짝수이다. 이는 $a_1=1$에 모순이므로 a_4, a_5는 모두 홀수이다.
따라서 a_1, a_4는 모두 홀수이므로 가능한 a_2, a_3의 값은 다음과 같다.

(ⅰ) a_2, a_3이 모두 홀수인 경우
$a_2=2l-1$ (l은 자연수)라 하자.
$a_3=\frac{1}{2}(a_2+a_1)=l$
$a_4=\frac{1}{2}(a_3+a_2)=\frac{3}{2}l-\frac{1}{2}$
$a_5=\frac{1}{2}(a_4+a_3)=\frac{5}{4}l-\frac{1}{4}$
$a_6=\frac{1}{2}(a_5+a_4)=\frac{11}{8}l-\frac{3}{8}=34$
이므로 $l=25$이다.
따라서 $a_2=2\times25-1=49$

(ⅱ) a_2는 짝수, a_3은 홀수인 경우
$a_2=2m$ (m은 자연수)라 하자.
$a_3=a_2+a_1=2m+1$
$a_4=a_3+a_2=4m+1$
$a_5=\frac{1}{2}(a_4+a_3)=3m+1$
$a_6=\frac{1}{2}(a_5+a_4)=\frac{7}{2}m+1=34$
이므로 m은 자연수가 아니다.

(ⅲ) a_2는 홀수, a_3은 짝수인 경우
$a_2=2n-1$ (n은 자연수)라 하자.
$a_3=\frac{1}{2}(a_2+a_1)=n$
$a_4=a_3+a_2=3n-1$
$a_5=a_4+a_3=4n-1$
$a_6=\frac{1}{2}(a_5+a_4)=\frac{7}{2}n-1=34$
이므로 $n=10$이다.
따라서 $a_2=2\times10-1=19$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 a_2의 값의 합은
$49+19=68$

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$\log_2 96-\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 96-\log_2 6=\log_2\frac{96}{6}$
$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

17. [출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 상수의 값을 구한다.

직선 $y=4x+5$와 곡선 $y=2x^4-4x+k$가
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 접한다고 하자.
$f(x)=2x^4-4x+k$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$
곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(a)=8a^3-4=4$, $a^3=1$ 즉, $a=1$
점 P는 직선 $y=4x+5$ 위의 점이므로
$b=4\times1+5=9$
이때 $f(1)=2-4+k=k-2=9$
따라서 $k=11$

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$x^2-5nx+4n^2=(x-n)(x-4n)=0$에서
$x=n$ 또는 $x=4n$
$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)=\sum_{n=1}^{7}(1-n)(1-4n)$
$=\sum_{n=1}^{7}(1-5n+4n^2)=7-5\times\frac{7\times8}{2}+4\times\frac{7\times8\times15}{6}=427$

19. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각
$x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면
$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt$, $x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$
두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나므로 $t>0$에서 방정식 $x_1(t)=x_2(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
$x_1(t)-x_2(t)=t(2t^2-12t+k)=0$에서 $k>0$이고 $t>0$이므로 이차방정식 $2t^2-12t+k=0$은 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-12)^2-4\times2\times k=0$
따라서 $k=18$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결한다.

$g(0)=0$이므로
$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$
$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$
$g'(0)=0$이므로 $f'(-p)=f'(p)=0$
$f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로
$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$
따라서 $f(x)=x^3-3p^2x+C$(단, C는 적분상수)
$f(0)=1$이므로 $f(x)=x^3-3p^2x+1$
$x\geq0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로
$\int_0^p g(x)\,dx=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}\,dx$
$=\int_0^p(x^3+3px^2)\,dx$
$=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4=20$
$p>0$이므로 $p=2$이고, $f(x)=x^3-12x+1$
따라서 $f(5)=66$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 문제를 해결한다.

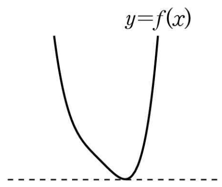
두 점 A와 B의 y좌표는 모두 k이므로
$\mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(\log_a k+k,\ k)$이다.
두 점 C와 D의 x좌표는 모두 k이므로
$\mathrm{C}(k,\ 2\log_a k+k)$, $\mathrm{D}(k,\ 1)$이다.
두 선분 AB와 CD가 만나는 점을 E라 하면
$\mathrm{E}(k,\ k)$이므로
$\overline{\mathrm{AE}}=k-1$, $\overline{\mathrm{BE}}=\log_a k$, $\overline{\mathrm{CE}}=2\log_a k$, $\overline{\mathrm{DE}}=k-1$
사각형 ADBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{85}{2}$이고,
삼각형 CAD의 넓이는 35이므로
삼각형 CBD의 넓이는 $\frac{85}{2}-35=\frac{15}{2}$이다.
$\overline{\mathrm{AE}}=p$, $\overline{\mathrm{BE}}=q$라 하면 두 삼각형 CAD, CBD의 넓이의 비는
$p:q=35:\frac{15}{2}=14:3$ 즉, $q=\frac{3}{14}p$
이때 $\overline{\mathrm{CE}}=2q$, $\overline{\mathrm{DE}}=p$이므로 삼각형 CAD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times(\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{DE}})$
$=\frac{1}{2}\times p\times(2q+p)=\frac{p}{2}\times\left(\frac{3}{7}p+p\right)$
$=\frac{5}{7}p^2=35$
$p^2=49$이고 $p>0$이므로
$p=7$, $q=\frac{3}{2}$
$k-1=p$, $\log_a k=q$이므로
$k=p+1=8$
$q=\log_a k=\log_a 8=\frac{3}{2}$, $a^{\frac{3}{2}}=8$ 즉, $a=4$
따라서 $a+k=12$

22. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재할 때,
$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이다.
$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$
$=\lim_{x\to k-}\left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\frac{x-k}{|x-k|}\right)$
$=\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times(-1)$ …… ㉠
$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$
$=\lim_{x\to k+}\left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\frac{x-k}{|x-k|}\right)$
$=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times1$ …… ㉡
㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$이거나
$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$와 $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$의 절댓값이

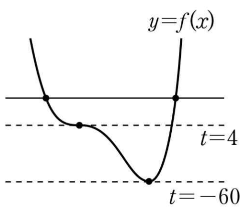
같고 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $g'(k)=0$ 즉, $f'(k)=0$ 이거나
$g(k)=0$ 즉, $f(k)=t$ 이다.
방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



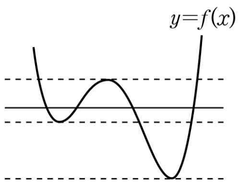
함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 실수 t 가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

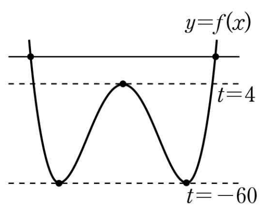


함수 $h(t)$ 가 $t=-60$ 과 $t=4$ 에서 불연속이므로 $f'(\alpha)=0$ 일 때 $f(\alpha)$ 의 값은 -60 과 4이다.
이때 $\lim\limits_{t\to4+}h(t)=4$ 가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 서로 다른 실수 t 가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.
[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4 이면 $\lim\limits_{t\to4+}h(t)=5$ 이므로 조건 (가)를 만족시킨다.
이때 $h(4)=5$

(i), (ii), (iii)에서 사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 두 극솟값은 모두 -60, 극댓값은 4이다.
$f(2)=4$ 이고 $f'(2)>0$ 이므로 방정식 $f(x)=4$ 의 가장 큰 실근이 2가 된다.
함수 $f(x)$ 의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$ 라 하면, $p(0)=0$ 이고 $p'(0)=0$ 이므로 $p(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다. 또한 함수 $p(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 양수 a 에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$ 이라 하면
$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$
$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$
이므로 $p'(x)=0$ 에서
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$
$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64$ 이므로
$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\dfrac{a^4}{4}=-64$
즉, $a^4=256=4^4$ 이므로 $a=4$ 이다.
이때 $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$
방정식 $p(x)=0$ 의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서
$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$
$f(4)=724$, $h(4)=5$ 이므로
$f(4)+h(4)=724+5=729$

[확률과 통계]

23	①	*24*	③	*25*	④	*26*	⑤	*27*	②
28	⑤	*29*	120	*30*	45				

23. [출제의도] 중복순열의 수를 계산한다.
${}_3\mathrm{P}_2+{}_3\Pi_2=3\times2+3^2=15$

24. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
학생 5명을 배열하는 원순열의 수는
$(5-1)!=24$

25. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
양 끝 모두에 B가 적힌 카드를 놓고 그 사이에 A, A, A, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 나머지 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

26. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.
주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_3=20$
남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$20\times8=160$

27. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.
$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-1$, $d'=d-1$ 이라 하면
$a+b+c+3d=10$ 에서
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+3(d'+1)=10$
$a'+b'+c'+3d'=4$
이때 a', b', c', d' 은 모두 음이 아닌 정수이다.
(i) $d'=0$ 인 경우
$a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$
(ii) $d'=1$ 인 경우
$a'+b'+c'=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$
(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는
$15+3=18$

28. [출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)를 만족시키려면 한 접시에는 빵을 2개 담고, 나머지 세 접시에는 빵을 1개씩 담아야 한다. 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_2=10$
2개의 빵이 담긴 접시를 A, 1개의 빵이 담긴 세 접시를 각각 B, C, D라 하자.
(i) 접시 A에 사탕을 담지 않는 경우
접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담고 나머지 접시에 사탕 1개를 담는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2=3$
(ii) 접시 A에 사탕 1개를 담는 경우
접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2=3$
접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 1개씩 담고 나머지 접시에 사탕 2개를 담는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2=3$
(i), (ii)에 의하여 접시 A, B, C, D에 사탕을 담는 경우의 수는
$3+3+3=9$
접시 A, B, C, D를 원 모양의 식탁에 놓는 원순열의 수는
$(4-1)!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times9\times6=540$

29. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)를 만족시키도록 선택한 6개의 수를 각각 1, 2, 3, a, b, c (a, b, c 는 3 이하의 자연수)
라 하자.
$3\le a+b+c\le9$ 에서
$9\le1+2+3+a+b+c\le15$
이므로 조건 (나)를 만족시키려면
$1+2+3+a+b+c=12$
$a+b+c=6$
(i) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 1, 2, 3인 경우
6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$
(ii) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 2, 2, 2인 경우
6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{4!}=30$
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$90+30=120$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.
조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 개수는
${}_5\mathrm{H}_5={}_{5+5-1}\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_5=126$
조건 (나)의 부정은
$f(2)=1$ 또는 $f(4)\times f(5)\ge20$ …… ㉠
이다.
(i) $f(2)=1$ 인 경우
$f(1)=1$ 이고 $1\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le5$ 이므로
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3$
$={}_7\mathrm{C}_3=35$
(ii) $f(4)\times f(5)\ge20$ 인 경우
$f(4)=4$, $f(5)=5$ 일 때
$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le4$ 이므로
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3$
$={}_6\mathrm{C}_3=20$
$f(4)=5$, $f(5)=5$ 일 때
$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le5$ 이므로
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3$
$={}_7\mathrm{C}_3=35$
그러므로 이 경우 구하는 함수 f 의 개수는
$20+35=55$
(iii) $f(2)=1$ 이고 $f(4)\times f(5)\ge20$ 인 경우
$f(1)=1$ 이고 $f(4)=4$, $f(5)=5$ 일 때
$1\le f(3)\le4$ 에서 $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1=4$
$f(1)=1$ 이고 $f(4)=5$, $f(5)=5$ 일 때
$1\le f(3)\le5$ 에서 $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1=5$
그러므로 이 경우 구하는 함수 f 의 개수는
$4+5=9$
(i), (ii), (iii)에 의하여 ㉠을 만족시키는 함수 f 의 개수는
$35+55-9=81$
따라서 구하는 함수 f 의 개수는
$126-81=45$

[미적분]

23	④	24	②	25	③	26	⑤	27	①
28	②	29	50	30	25				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{2\times3}{1}=6$$

24. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$3^n-2^n<a_n<3^n+2^n$ 에서

$$\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}<\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}<\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}+2^n}=\frac{1}{3}$$

25. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(2n-1)d-6n}{a_1+(n-1)d+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2d-6)n+a_1-d}{dn+a_1-d+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2d-6+\frac{a_1-d}{n}}{d+\frac{a_1-d+5}{n}}$$

$$=\frac{2d-6}{d}$$

$\frac{2d-6}{d}=4$ 에서 $d=-3$

$a_2-a_1=d$ 이므로

$a_2-a_1=-3$

26. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$ 에서

$c_n=(n^2+1)a_n$, $d_n=(4n^2+1)(a_n+b_n)$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=1$ 이고

$a_n=\frac{c_n}{n^2+1}$, $b_n=\frac{d_n}{4n^2+1}-\frac{c_n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)\left(\frac{2d_n}{4n^2+1}-\frac{c_n}{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(2n^2+1)}{4n^2+1}\times d_n-\frac{2n^2+1}{n^2+1}\times c_n\right\}$$

$$=1\times1-2\times3=-5$$

27. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_n=b_1+(n-1)d$

$\frac{a_1}{b_1}=3$ 에서 $\frac{3}{b_1}=3$, $b_1=1$

$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=2$ 에서 $\frac{a_2}{b_2}=-1$

$-\frac{4}{1+d}=-1$ 에서 $d=3$

$b_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

$n\geq2$ 일 때

$$\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k}$$

$$=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}$$

$$=-\frac{6}{n(n+1)}$$

이므로 $a_n=-\frac{6(3n-2)}{n^2+n}$ $(n\geq2)$

$$a_nb_n=-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}\quad(n\geq2)$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{6(3n-2)^2}{n^2+n}\right\}=-54$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-54$$

28. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 A_n의 좌표는 $(0,\ n)$이다.

$\log_a(x-1)=n$ 에서 $x=a^n+1$ 이므로

점 B_n의 좌표는 $(a^n+1,\ n)$이다.

$$\overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{\{(a^{n+1}+1)-(a^n+1)\}^2+1}=\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}$$

사각형 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$은 사다리꼴이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times1\times\{(a^n+1)+(a^{n+1}+1)\}$$

$$=\frac{(a+1)a^n+2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{(a+1)a^n+2}$$

(ⅰ) $0<a<1$ 일 때

$\lim_{n\to\infty}a^n=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\frac{2\times1}{2}=1$$

$\frac{3}{2a+2}=1$ 에서 $a=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a>1$ 일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}}{(a+1)+\frac{2}{a^n}}$$

$$=\frac{2|a-1|}{a+1}$$

$$=\frac{2(a-1)}{a+1}$$

$\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$ 에서 $a=\frac{7}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$

29. [출제의도] 이차부등식의 해를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$의 해는

$2n-\sqrt{4n^2+n}<x<2n+\sqrt{4n^2+n}$

$2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$ 에서

$-1<2n-\sqrt{4n^2+n}<0$

$4n<2n+\sqrt{4n^2+n}<4n+1$

부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x는

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 4n$

이므로 그 개수는 $4n+1$이다.

$a_n=4n+1$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{na_n}=\infty$ 이다.

$p\leq0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=\infty$ 이므로 $p>0$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-pn)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}=q$ 이려면

$4-p^2=0$ 에서 $p>0$ 이므로

$p=2$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $100pq=100\times2\times\frac{1}{4}=50$

30. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수의 그래프에 대한 문제를 해결한다.

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$ 에서

$|x|<1$ 이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ 이므로

$f(x)=-x$

$|x|=1$ 이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=0$$

$|x|>1$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=x$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases}-x & (|x|<1)\\ 0 & (|x|=1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$$

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $2k-2\leq|x|<2k-1$ 일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$ 이므로

$$g(x)=(2k-1)\times\left(-\frac{x}{2k-1}\right)=-x$$

(ⅱ) $|x|=2k-1$ 일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|=1$ 이므로

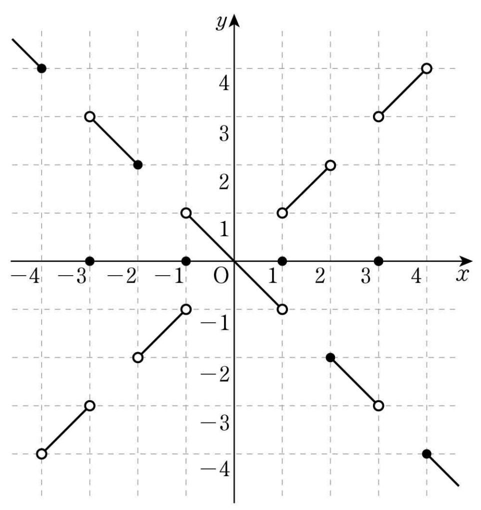
$g(x)=(2k-1)\times0=0$

(ⅲ) $2k-1<|x|<2k$ 일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|>1$ 이므로

$$g(x)=(2k-1)\times\left(\frac{x}{2k-1}\right)=x$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$t=2m-1$(m은 정수)일 때 직선 $y=t$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않는다.

따라서 $0<t<10$인 모든 t의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

[기하]

23	⑤	24	①	25	③	26	②	27	④
28	④	29	96	30	100				

23. [출제의도] 타원의 장축의 길이를 계산한다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는

$2\times\sqrt{16}=2\times4=8$

24. [출제의도] 포물선의 방정식을 이해하여 포물선의 초점과 준선 사이의 거리를 구한다.

포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0, 2)$이고 준선의 방정식은 $y=-2$이다.

따라서 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는 4이다.

25. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2a$이므로

$2a=4$에서 $a=2$

점 $\mathrm{F}(3, 0)$이 쌍곡선의 한 초점이므로

$a^2+b^2=3^2$에서

$b^2=5$, $b=\sqrt{5}$

쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선 l의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$

$\sqrt{5}x-2y=0$

따라서 점 $\mathrm{F}(3, 0)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

26. [출제의도] 포물선의 평행이동을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

$y^2=4x+4y+4$에서

$(y-2)^2=4(x+2)$

포물선 $y^2=4x+4y+4$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 초점의 좌표는 $(-1, 2)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

두 점 A, B에서 초점까지의 거리는 모두 원의 반지름의 길이인 2이므로 포물선의 정의에 의하여 두 점 A, B와 준선 사이의 거리는 모두 2이다.

$|a-(-3)|=2$, $|c-(-3)|=2$이고

$a\geq-2$, $c\geq-2$이므로

$a=-1$, $c=-1$

두 점 A, B는 포물선 $y^2=4x+4y+4$의 축인 직선 $y=2$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+d}{2}=2$

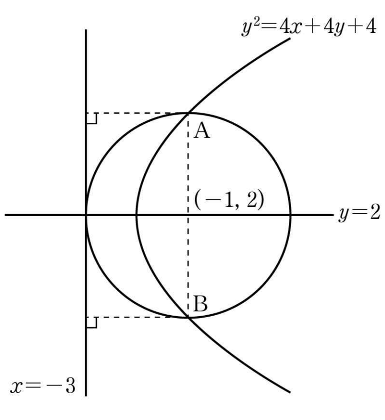
$b+d=4$

따라서

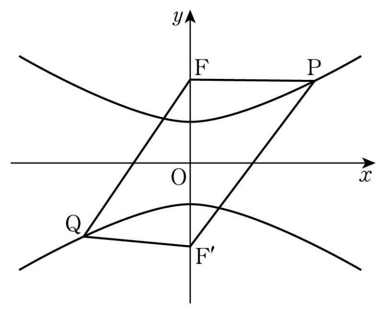
$a+b+c+d=(-1)+(-1)+4$

$=2$

[참고]



27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하여 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$의 주축의 길이는 4이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}})=8$

$(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}})=8$

$5+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}})=8$

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=3$

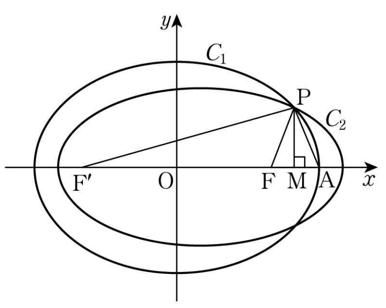
$\overline{\mathrm{PF}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}$이므로

$\overline{\mathrm{QF}}-\frac{2}{3}\overline{\mathrm{QF}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{QF}}=3$

$\overline{\mathrm{QF}}=9$, $\overline{\mathrm{PF}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=15$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



두 타원 C_1, C_2의 장축의 길이가 같으므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF'}}$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}$

삼각형 PFA가 이등변삼각형이므로

선분 FA의 중점을 M이라 하면

$\angle\mathrm{PMF}=90^\circ$

$\cos(\angle\mathrm{AFP})=\frac{\overline{\mathrm{FM}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{3}{8}$에서

$\overline{\mathrm{FM}}=3k\,(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=8k$

타원 C_1의 장축의 길이가 6이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=6-8k$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{OA}}-2\overline{\mathrm{FM}}=3-6k$이므로

$\overline{\mathrm{F'M}}=\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{FM}}=2\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FM}}$

$=2(3-6k)+3k=6-9k$

직각삼각형 PF′M에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{F'M}}^2$이고

직각삼각형 PFM에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{FM}}^2$이므로

$(6-8k)^2-(6-9k)^2=(8k)^2-(3k)^2$

$k(12-17k)=55k^2$, $12k(6k-1)=0$

$k>0$이므로 $k=\frac{1}{6}$

따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이는

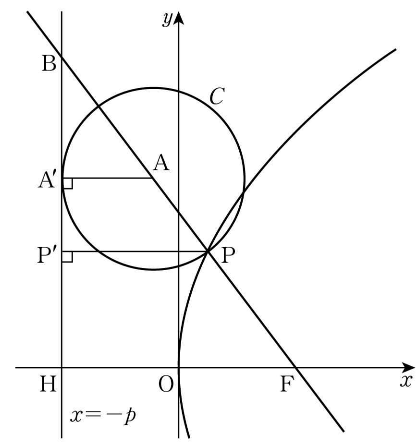
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{FA}}=8k+8k+6k=22k=\frac{11}{3}$

29. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결한다.

원 C의 중심을 A라 하자.

세 점 A, P, F에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, H라 하자.

직선 FP가 준선 $x=-p$와 만나는 점을 B라 하자.



원 C의 반지름의 길이가 3이므로

$\overline{\mathrm{AA'}}=3$, $\overline{\mathrm{AP}}=3$

직선 l의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{BA'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}=\frac{4}{3}$, 즉 $\overline{\mathrm{BA'}}=4$, $\overline{\mathrm{BA}}=5$, $\overline{\mathrm{BP}}=8$

두 삼각형 BA′A, BP′P는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{A'A}}:\overline{\mathrm{P'P}}=\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{P'P}}=\frac{8\times3}{5}=\frac{24}{5}$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{P'P}}=\frac{24}{5}$이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}=\frac{64}{5}$

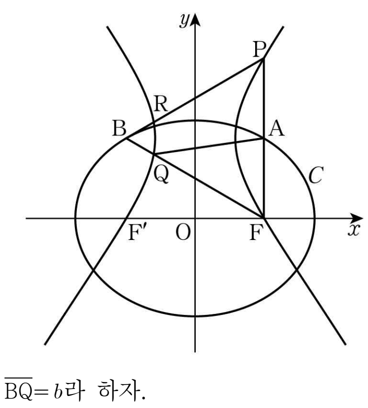
두 삼각형 BA′A, BHF는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{A'A}}:\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{HF}}=\frac{\frac{64}{5}\times3}{5}=\frac{192}{25}$

$2p=\overline{\mathrm{HF}}=\frac{192}{25}$에서 $p=\frac{96}{25}$

따라서 $25p=96$

30. [출제의도] 타원과 쌍곡선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



$\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{BQ}}=b$라 하자.

점 A는 선분 PF의 중점이고 조건 (가)에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{PF}}=2a$

타원 C의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}}=2a+a=3a$

조건 (나)에서

$(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}})-3\overline{\mathrm{BQ}}=3$

$3a-3b=3$, $b=a-1$

두 점 F, Q는 모두 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BF}}-\overline{\mathrm{AF}}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=(2a-a)+b=2a-1$

삼각형 AQF에서

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{BF}}-\overline{\mathrm{BQ}}=2a-b=a+1$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2-2\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\cos60^\circ$

$(2a-1)^2=a^2+(a+1)^2-a(a+1)$

$3a^2-5a=0$

$a(3a-5)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{5}{3}$

따라서 $60\times\overline{\mathrm{AF}}=60a=100$