

수학 영역

정답

1	③	2	②	3	①	4	③	5	①
6	④	7	⑤	8	⑤	9	②	10	②
11	①	12	④	13	③	14	⑤	15	②
16	③	17	④	18	①	19	③	20	④
21	⑤	22	13	23	9	24	3	25	18
26	20	27	32	28	30	29	67	30	144

해설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A+B=(x^2+3xy+2y^2)+(2x^2-3xy-y^2)$$

$$=3x^2+y^2$$

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$$\bar{z}=1+2i$$

$$z+\bar{z}=(1-2i)+(1+2i)=2$$

3. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$$x^2+ax+b=x(x+3)+4$$

$$=x^2+3x+4$$

$$a=3, b=4$$

따라서 $a \times b=12$

4. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(a-3)^2}=\sqrt{17}$$

$$\sqrt{a^2-6a+10}=\sqrt{17}$$

$$a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0$$

$$a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

$a > 0$ 이므로 $a=7$

5. [출제의도] 평행이동 이해하기

직선 $y=kx+1$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의
방정식은 $y-(-2)=k(x-1)+1$
 $y=kx-k-1$
이 직선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로
 $1=3k-k-1$
따라서 $k=1$

6. [출제의도] 선분의 내분점 계산하기

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는
 $(\frac{1 \times a + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times 2}{1+2}) = (\frac{a+2}{3}, \frac{b+4}{3})$
 $\frac{a+2}{3}=2, a=4$
 $\frac{b+4}{3}=3, b=5$
따라서 $a+b=9$

7. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2-x+k=0$ 의 서로 다른 두 근이
 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에
의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=k$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1-3k=10$$

따라서 $k=-3$

8. [출제의도] 이차부등식 이해하기

이차부등식 $x^2+ax-12 \leq 0$ 의 해가
 $-4 \leq x \leq b$ 이므로

$$x^2+ax-12=(x+4)(x-b)$$

$$=x^2+(4-b)x-4b$$

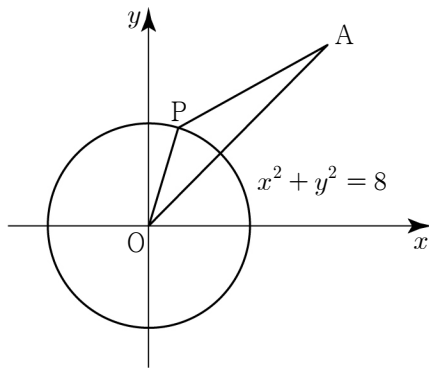
$$a=4-b, -12=-4b$$

$$a=1, b=3$$

따라서 $a-b=-2$

9. [출제의도] 원의 방정식 이해하기

원 $x^2+y^2=8$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$
 $\overline{OA}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}, \overline{OP}=2\sqrt{2}$



$$\overline{OA} \leq \overline{OP} + \overline{PA}$$

$$\overline{AP} \geq \overline{OA} - \overline{OP} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{2}$

10. [출제의도] 두 직선의 수직 조건 이해하기

직선 $2x+3y+1=0$ 의 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 이므로

점 $(1, a)$ 를 지나고 직선 $2x+3y+1=0$ 에
수직인 직선의 방정식은

$$y-a=\frac{3}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{3}{2}x+a-\frac{3}{2}$$

$$a-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

따라서 $a=4$

11. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

부등식 $x^2-x-12 \leq 0$ 의 해는
 $(x+3)(x-4) \leq 0$ 에서
 $-3 \leq x \leq 4 \dots \textcircled{A}$

부등식 $x^2-3x+2 > 0$ 의 해는
 $(x-1)(x-2) > 0$ 에서
 $x < 1$ 또는 $x > 2 \dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $-3 \leq x < 1$ 또는 $2 < x \leq 4$

정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 3, 4$
따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 1

12. [출제의도] 인수분해 이해하기

$$x^2+x=X \text{ 라 하면}$$

$$(x^2+x)(x^2+x+2)-8$$

$$=X(X+2)-8$$

$$=X^2+2X-8$$

$$=(X-2)(X+4)$$

$$=(x^2+x-2)(x^2+x+4)$$

$$=(x-1)(x+2)(x^2+x+4)$$

$$a=2, b=4$$

따라서 $a+b=6$

13. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를

활용하여 문제 해결하기

점 $(1, 3)$ 을 지나고 기울기가 k 인 직선 l 의
방정식은

$$y=k(x-1)+3$$

원점과 직선 $kx-y-k+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|-k+3|=\sqrt{5k^2+5}$$

$$2k^2+3k-2=0$$

$$(k+2)(2k-1)=0$$

$$k=-2 \text{ 또는 } k=\frac{1}{2}$$

$k > 0$ 이므로 $k=\frac{1}{2}$

14. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 활용하여
문제 해결하기

이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2-4k+b=0$ 의
판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-4k+b)$$

$$=k^2-2ak+a^2-k^2+4k-b$$

$$=(-2a+4)k+(a^2-b)=0 \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 성립하므로

$$-2a+4=0, a^2-b=0$$

$$a=2, b=4$$

따라서 $a+b=6$

15. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여
문제 해결하기

삼차방정식 $x^3+5x^2+(a-6)x-a=0$ 의 서로
다른 실근의 개수가 2 가 되기 위해서는 주어진
삼차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.

$$x^3+5x^2+(a-6)x-a=0$$

$$(x-1)(x^2+6x+a)=0$$

(i) 이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 이 1 과 1 이
아닌 실근을 갖는 경우

$$1^2+6 \times 1+a=0, a=-7$$

주어진 삼차방정식은 $(x+7)(x-1)^2=0$

$$x=-7 \text{ 또는 } x=1 \text{ (중근)}$$

(ii) 이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 이 1 이 아닌
중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 의 판별식을

D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=3^2-a=0, a=9$$

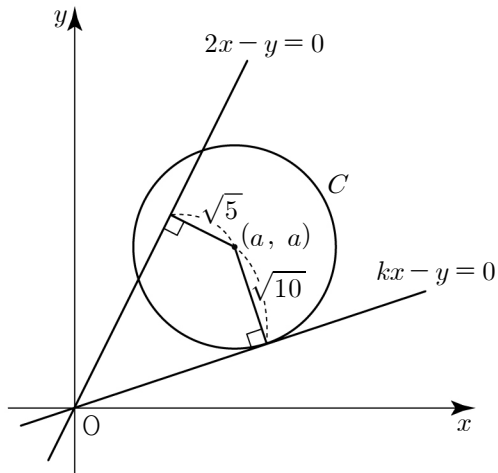
주어진 삼차방정식은 $(x+3)^2(x-1)=0$

$$x=-3 \text{ (중근) 또는 } x=1$$

(i), (ii) 에 의하여 모든 실수 a 의 값은 $-7, 9$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 2

16. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원 C의 중심 (a, a)와 직선 $2x - y = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2a - a|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, a = 5$$

원 C의 중심 (5, 5)와 직선 $kx - y = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|5k - 5|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$|5k - 5| = \sqrt{10k^2 + 10}$$

$$3k^2 - 10k + 3 = 0$$

$$(3k - 1)(k - 3) = 0$$

$$k = \frac{1}{3} \text{ 또는 } k = 3$$

$$0 < k < 1 \text{ 이므로 } k = \frac{1}{3}$$

17. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $(-k, -k^2 + 4k)$

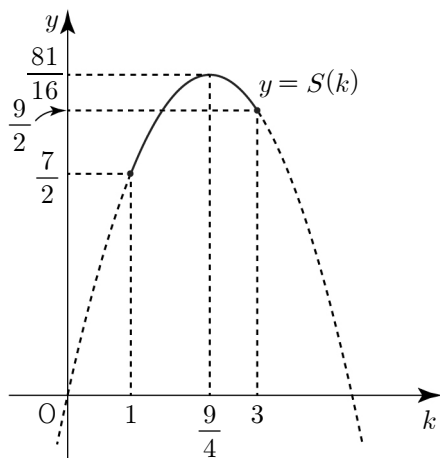
(사각형 PQOR의 넓이)

= (삼각형 PQO의 넓이) + (삼각형 POR의 넓이)

사각형 PQOR의 넓이를 $S(k)$ 라 하면

$$S(k) = \frac{1}{2} \times 2 \times (-k^2 + 4k) + \frac{1}{2} \times 1 \times k$$

$$= -\left(k - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{81}{16} \quad (1 \leq k \leq 3)$$



$$k = \frac{9}{4} \text{ 일 때, } S(k) \text{의 최댓값은 } \frac{81}{16}$$

18. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 $f(x)$ 를 $x^3 - 1$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q(x)$ 라 하면 $Q(x)$ 는 차수가 2 이하인 다항식이다.

$$f(x) = (x^3 - 1)Q(x) + Q(x)$$

$f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지가 72이므로

$$f(2) = (8 - 1)Q(2) + Q(2) = 8Q(2) = 72$$

$$Q(2) = 9 \dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에 의하여

$f(x) - x$ 는 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(x) - x = (x - 1)(x^2 + x + 1)Q(x) + Q(x) - x$$

$$Q(x) - x = 0 \text{ 또는}$$

$$Q(x) - x = a(x^2 + x + 1) \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

(i) $Q(x) - x = 0$ 인 경우

$$Q(x) = x$$

$$Q(2) = 2 \neq 9 \text{ 이므로 } \textcircled{7} \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $Q(x) - x = a(x^2 + x + 1)$ 인 경우

$$Q(x) = a(x^2 + x + 1) + x$$

$$Q(2) = a \times (4 + 2 + 1) + 2 = 9$$

$$7a = 7, a = 1$$

$$Q(x) = (x^2 + x + 1) + x = x^2 + 2x + 1$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 2x + 1) + x^2 + 2x + 1 = x^3(x + 1)^2$$

$$\text{따라서 } f(1) = 4$$

19. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제 해결하기

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 조건 (가)에 의하여

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 -2 ,

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 2이다.

$$f(-3) - g(-3) = 0, f(-3) = g(-3)$$

$$f(2) - g(2) = 0, f(2) = g(2)$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 만나는 두 점

A, B의 x좌표는 $-3, 2$ 이다.

직선 AB의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = -1$$

$$f(2) - f(-3) = -5$$

조건 (나)에 의하여

$$f(-3) + g(2) = f(-3) + f(2) = 5$$

$$f(2) = g(2) = 0, f(-3) = g(-3) = 5$$

$$f(x) = -2(x - 2)(x - a) \quad (\text{단, } a \text{는 상수이다.})$$

$$f(-3) = -30 - 10a = 5, a = -\frac{7}{2}$$

$$f(x) = -(x - 2)(2x + 7)$$

$$g(x) = 2(x - 2)(x - b) \quad (\text{단, } b \text{는 상수이다.})$$

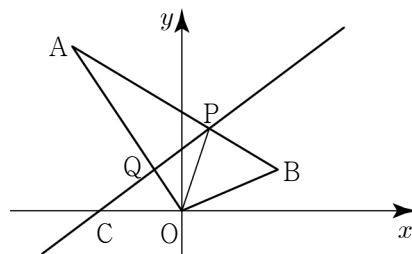
$$g(-3) = 30 + 10b = 5, b = -\frac{5}{2}$$

$$g(x) = (x - 2)(2x + 5)$$

$$f(-1) = 15, g(-1) = -9$$

$$\text{따라서 } f(-1) + g(-1) = 6$$

20. [출제의도] 선분의 내분을 활용하여 문제 해결하기



직선 PC와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하고 삼각형 AOB의 넓이를 S라 하자.

두 삼각형 AOP, AQP의 넓이가 각각 $\frac{2}{3}S$,

$\frac{1}{2}S$ 이므로 삼각형 QOP의 넓이는 $\frac{1}{6}S$ 이다.

두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비는

선분 AQ와 선분 QO의 길이의 비와 같다.

두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비가

$$3:1 \text{ 이므로 } \overline{AQ} : \overline{QO} = 3:1$$

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 0 + 1 \times (-8)}{3 + 1}, \frac{3 \times 0 + 1 \times a}{3 + 1}\right) = \left(-2, \frac{a}{4}\right)$$

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 7 + 1 \times (-8)}{2 + 1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2 + 1}\right) = \left(2, \frac{a + 6}{3}\right)$$

직선 PC의 방정식은

$$y = \frac{\frac{a + 6}{3}}{2 - (-6)}(x + 6) = \frac{a + 6}{24}(x + 6)$$

점 Q가 직선 PC 위의 점이므로

$$\frac{a}{4} = \frac{a + 6}{24} \times (-2 + 6)$$

$$\text{따라서 } a = 12$$

21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 추론하기

네 실수 a, c, α, β 의 대소관계에 따른

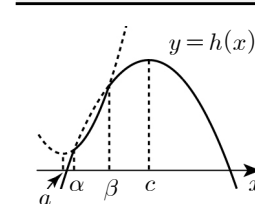
함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형과

함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로

다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 개수는 다음과 같다.

① $\beta \leq a, c < a$	② $\alpha < a < \beta, c < a$
실수 k의 개수는 0	실수 k의 개수는 2
③ $\alpha < a < \beta, a = c$	④ $\alpha < a < \beta, a < c$
실수 k의 개수는 1	실수 k의 개수는 2

⑤ $a \leq \alpha, a < c$



실수 k의 개수는 0

(i) ①, ③, ⑤인 경우

조건을 만족시키지 않는다.

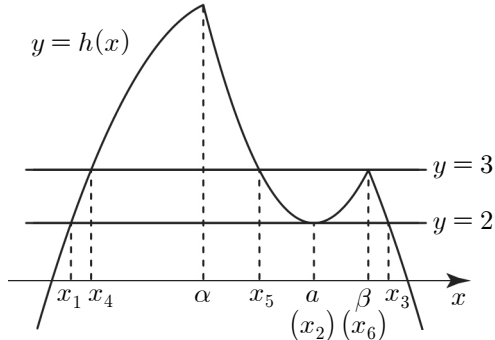
(ii) ②인 경우 ($\alpha < a < \beta, c < a$)

조건에 의하여 $b = 2, h(\beta) = 3$ 이다.

함수 $y = h(x)$ 의 그래프가

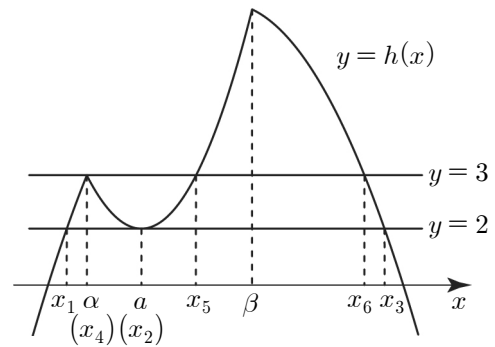
직선 $y = 2$ 와 만나는 세 점의 x좌표를 작은

수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3 이라 하고, 직선 $y=3$ 과 만나는 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_4, x_5, x_6 이라 하자.



$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2c, \quad x_2 = a \text{ 이므로 } S = 2c + a \\ x_4 + x_6 &= 2c \text{ 이므로 } T = 2c + x_5 \\ T - S &= (2c + x_5) - (2c + a) = x_5 - a \\ x_5 - a < 0 < \frac{a}{2} \text{ 이므로 } T - S &\neq \frac{a}{2} \end{aligned}$$

(iii) ㉔인 경우 ($\alpha < a < \beta, a < c$) 조건에 의하여 $b=2, h(\alpha)=3$ 이다. 함수 $y=h(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3 이라 하고, 직선 $y=3$ 과 만나는 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_4, x_5, x_6 이라 하자.



$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2c, \quad x_2 = a \text{ 이므로 } S = 2c + a \\ x_4 + x_6 &= 2c \text{ 이므로 } T = 2c + x_5 \\ T - S &= (2c + x_5) - (2c + a) = x_5 - a = \frac{a}{2} \\ x_5 &= \frac{3}{2}a \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\alpha < a < \beta, a < c, f(x)=(x-a)^2+2,$
 $f(x_5)=3, x_5=\frac{3}{2}a$ 이다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}a\right) &= \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + 2 \\ &= \frac{a^2}{4} + 2 = 3 \end{aligned}$$

$a > 0$ 이므로 $a=2, x_5=3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2 + 2 \\ \alpha = x_4 \text{ 이고 } x_4 + x_5 &= 2a \text{ 이므로} \\ \alpha + 3 &= 4, \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= 3 \text{ 이므로 } f(\alpha) = g(\alpha) = 3 \\ g(1) &= -\frac{1}{2}(1-c)^2 + 11 = 3, \quad c = 5 \end{aligned}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 11$$

이차방정식 $f(x)=g(x)$ 에서

$$f(x) - g(x) = \frac{3}{2}(x-1)(x-5) = 0$$

$\beta=5$

$$\begin{aligned} h(\alpha + \beta) &= h(6) = g(6) \\ &= -\frac{1}{2}(6-5)^2 + 11 = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

22. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$f(x)=x^3+2x^2-9x+a$ 라 하면 나머지정리에 의하여 $f(1)=1+2-9+a=-6+a=7$ 따라서 $a=13$

23. [출제의도] 연립일차부등식 이해하기

부등식 $2x \leq x+11$ 의 해는 $x \leq 11 \dots \textcircled{㉑}$

부등식 $x+5 < 4x-2$ 의 해는 $x > \frac{7}{3} \dots \textcircled{㉒}$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $\frac{7}{3} < x \leq 11$

정수 x 는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 따라서 모든 정수 x 의 개수는 9

24. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=2x$ 를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=2x+m$ 직선 $y=2x+m$ 이 이차함수

$y=x^2-4x+12$ 의 그래프에 접하므로

$$x^2 - 4x + 12 = 2x + m$$

$$x^2 - 6x + 12 - m = 0$$

이차방정식 $x^2 - 6x + 12 - m = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - (12 - m) = 9 - 12 + m = 0$$

따라서 $m=3$

25. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 & \dots \textcircled{㉑} \\ x^2 - 6x - 12y + 36 = 0 & \dots \textcircled{㉒} \end{cases}$$

$\textcircled{㉑}$ 에서 $(x-2y)^2=0$ 이므로 $x=2y \dots \textcircled{㉓}$

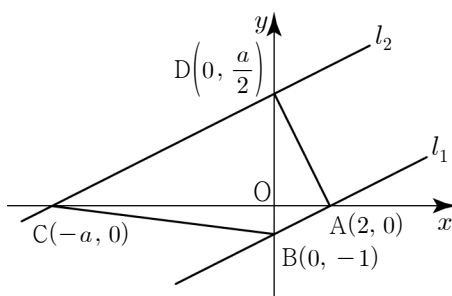
$\textcircled{㉒}, \textcircled{㉓}$ 에서

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 6x + 36 &= x^2 - 12x + 36 \\ &= (x-6)^2 = 0 \end{aligned}$$

$x=6, y=3$ 에서 $\alpha=6, \beta=3$

따라서 $\alpha \times \beta = 18$

26. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기



두 직선 l_1, l_2 가 서로 평행하므로

$$l_2: x - 2y + a = 0 \quad (a > 0)$$

$$\begin{aligned} &(\text{사각형 ADCB의 넓이}) \\ &= (\text{삼각형 ADC의 넓이}) + (\text{삼각형 ACB의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times (a+2) \times \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \times (a+2) \times 1 \\ &= \frac{1}{2} (a+2) \left(\frac{a}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{4} + a + 1 = 25$$

$$a^2 + 4a - 96 = 0$$

$$(a+12)(a-8) = 0$$

$$a = -12 \text{ 또는 } a = 8$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 8$$

두 직선 l_1 과 l_2 사이의 거리는

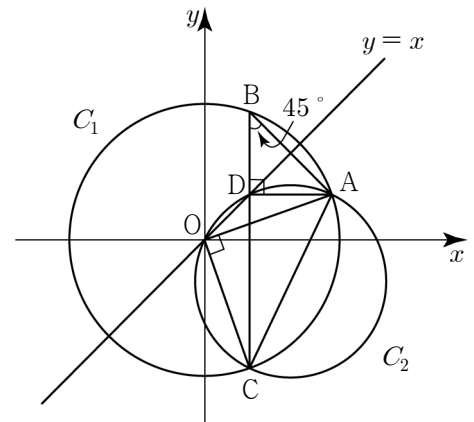
직선 l_1 위의 점 $A(2, 0)$ 과 직선

$l_2: x - 2y + 8 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d = \frac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $d^2 = 20$

27. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 $A(a, 2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $B(2, a)$ 이고, 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $C(2, -a)$

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{a^2+4}$ 이므로 점 O 는 삼각형 ABC 의 외접원의 중심이고 $r_1 = \overline{OA}$

선분 BC 와 직선 $y=x$ 가 만나는 점을 D 라 하면 삼각형 BDA 는 직각이등변삼각형이므로

$$\angle ABD = \angle ABC = 45^\circ$$

두 삼각형 ABC, AOC 의 외접원을 각각 C_1, C_2 라 하자.

$\angle ABC$ 는 원 C_1 의 호 AC 에 대한 원주각이고,

$\angle AOC$ 는 원 C_1 의 호 AC 에 대한

중심각이므로 $\angle AOC = 2 \times \angle ABC = 90^\circ$

$\angle AOC = 90^\circ$ 이므로 선분 AC 는 원 C_2 의 지름이다.

$$r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_1$$

$$r_1 \times r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_1^2 = 18\sqrt{2}$$

$$r_1 = 6$$

$$\overline{OA} = \sqrt{a^2+4} = 6$$

따라서 $a^2 = 32$

[참고]

$A(a, 2), C(2, -a)$ 이므로

직선 OA 의 기울기 $\frac{2}{a}$

직선 OC 의 기울기 $-\frac{a}{2}$

두 직선 OA, OC 의 기울기의 곱이

$$\frac{2}{a} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -1 \text{ 이므로}$$

두 직선 OA, OC 가 서로 수직이다.

$\angle AOC = 90^\circ$

28. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = k(x-2)(x-a)$ ($k > 0$) 이라 하면

$$f(x) = k\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 - \frac{k(a-2)^2}{4}$$

$$P\left(\frac{a+2}{2}, -\frac{k(a-2)^2}{4}\right), C(0, 2ak)$$

사각형 APRQ가 정사각형이므로 두 직선 AP, BC가 서로 평행하다.

$$\frac{-\frac{k(a-2)^2}{4}}{\frac{a+2}{2} - 2} = \frac{-2ak}{a}$$

$$\frac{-k(a-2)}{2} = -2k, a = 6$$

$$P(4, -4k), C(0, 12k)$$

직선 BC의 방정식은 $2kx + y - 12k = 0$

사각형 APRQ가 정사각형이므로 $\overline{AP} = \overline{AQ}$

$$\sqrt{2^2 + (-4k)^2} = \frac{|4k - 12k|}{\sqrt{(2k)^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{4(4k^2 + 1)} = \frac{8k}{\sqrt{4k^2 + 1}}$$

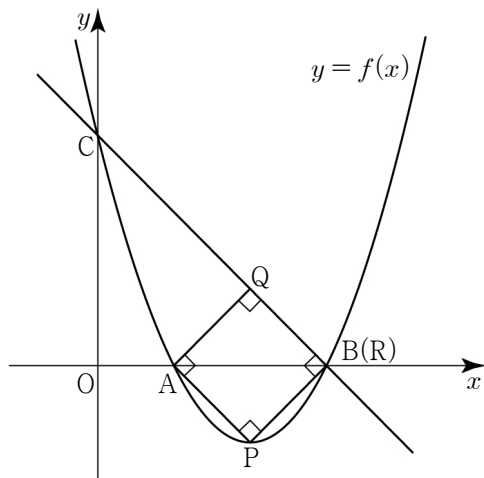
$$4k^2 + 1 = 4k$$

$$(2k - 1)^2 = 0, k = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-6)$$

따라서 $f(12) = 30$

[참고]



29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 추론하기

조건 (가), (나)에 의하여

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값과

$0 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 m 으로 같으므로

$$0 < p \leq 3, q = m$$

$$f(x) = (x-p)^2 + m$$

(i) $0 < p \leq \frac{3}{2}$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(3) = (3-p)^2 + m = m + 4$$

$$(3-p)^2 = 4$$

$0 < p \leq \frac{3}{2}$ 이므로 $p = 1$

$$f(x) = (x-1)^2 + m$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x = 5$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(5) = (5-1)^2 + m = 4m, m = \frac{16}{3}$$

m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{3}{2} < p \leq 3$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(0) = (0-p)^2 + m = m + 4, p^2 = 4$$

$\frac{3}{2} < p \leq 3$ 이므로 $p = 2$

$$f(x) = (x-2)^2 + m$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x = 5$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(5) = (5-2)^2 + m = 4m, m = 3$$

(i), (ii)에 의하여

$$m = 3, f(x) = (x-2)^2 + 3$$

따라서 $f(10) = 67$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

$x_1 < x_2 < x_3$ 이라 하면

조건 (가)에 의하여 $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$

또는 $x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > 0$

조건 (나)에 의하여 세 점 $(x_1, f(x_1)),$

$(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 을 꼭짓점으로 하는

삼각형의 무게중심의 y 좌표가 음수이므로 $a < 0$

원의 중심을 $P(p, q)$ 라 하면 $q < 0$

점 P와 직선 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는

점 P와 x 축 사이의 거리 $-q$ 와 같다.

$$\frac{|4p - 3q|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4p - 3q|}{5} = -q$$

(i) $4p - 3q = -5q$ 인 경우

$$q = -2p \text{ 이므로}$$

점 P는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -2x$ 가 만나는 점이다.

(ii) $-(4p - 3q) = -5q$ 인 경우

$$q = \frac{1}{2}p \text{ 이므로}$$

점 P는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 가 만나는 점이다.

조건 (가)와 (i), (ii)에 의하여

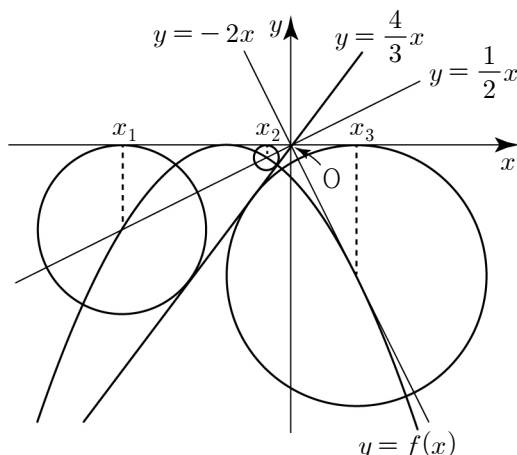
$x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > 0$ 이고 $b < 0$

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -2x$ 에

접하고, 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 와 서로 다른 두 점에서

만난다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실수 t 에 대하여 $P(t, a(t-b)^2)$ 이라 하자.

① 점 P가 직선 $y = -2x$ 위의 점인 경우

t 에 대한 이차방정식 $a(t-b)^2 = -2t$ 가 중근 x_3 을 갖는다.

$$at^2 - 2(ab-1)t + ab^2 = 0 \dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $at^2 - 2(ab-1)t + ab^2 = 0$ 의

판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (ab-1)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$a^2b^2 - 2ab + 1 - a^2b^2 = 0$$

$$b = \frac{1}{2a} \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$at^2 + t + \frac{1}{4a} = 0$$

$$a\left(t + \frac{1}{2a}\right)^2 = 0$$

$$x_3 = -\frac{1}{2a}$$

② 점 P가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점인 경우

t 에 대한 이차방정식 $a(t-b)^2 = \frac{1}{2}t$ 가 서로

다른 두 근 x_1, x_2 를 갖는다.

$$2at^2 - (4ab+1)t + 2ab^2 = 0$$

②에서 $b = \frac{1}{2a}$ 이므로

$$2at^2 - 3t + \frac{1}{2a} = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2a}$$

조건 (나)와 ①, ②에 의하여

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 2x_3$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - 2x_3$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2a} - 2 \times \left(-\frac{1}{2a}\right)$$

$$= \frac{3}{4a} + \frac{1}{a} = \frac{7}{4a} = -7$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

②에서 $b = \frac{1}{2a}$ 이므로 $b = -2$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$$

따라서 $f(4) \times f(6) = 144$